Rozšíření MA1 – domácí úkol 7 (řešení)

Dvojný integrál

Poznámka – z přednášek pro MA2 se zde hodí:

přednáška 20.4. a několik příkladů k této přednášce – – úvod do integrálního počtu funkcí dvou proměnných (s opakováním Riemannova integrálu funkce jedné proměnné z MA1) a dále dvojný integrál přes obdélník ($\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$).

přednáška 22.4. – dvojný integrál přes „obecnější" oblast $\omega \subset R^2$

přednáška 27.4. – výpočet dvojného integrálu určitým transformace souřadnic kartézských do polárních souřadnic.

I. Výpočet dvojného integrálu $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$:

1) $D = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$

„návod" pro výpočet – Fubiniova věta:

„je-li $f \in R(D)$ ($R(D)$ – množina Riemannovsky integrovatelných funkcí přes D – je-li f. spojitá na D, pak $f \in R(D)$, nebo, je-li f spojitá až na konečně mnoho bodů a omezená v D, je $f \in R(D)$), pak platí:

$$\left(\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \right) \iint\limits_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$ – tj. nezáleží na pořadí integrace

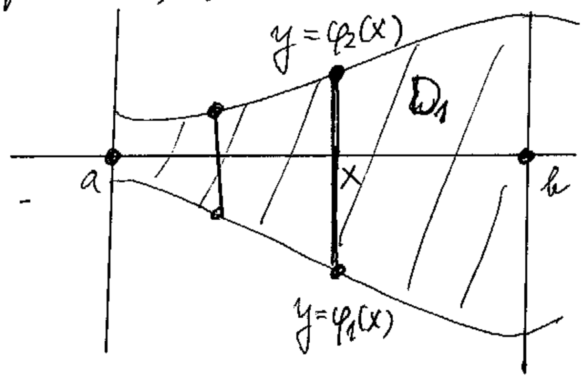
(integrál dvojný se počítá „převedením" na integrál dvojnásobný – dvě integrace dle jedné proměnné za sebou" (jako „parciální" integrování u vnitřního " integrálu)

2) Integrál dvojný přes „obecnější" oblast:

$D_1 = \{[x,y];\ a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$, $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C^{(1)}(\langle a,b\rangle)$;

je-li funkce f spojitá v D_1 (pro jednoduchost, též stačí tento předpoklad pro „naše" příklady), pak $f \in R(D_1)$ a (Fubiniho věta)

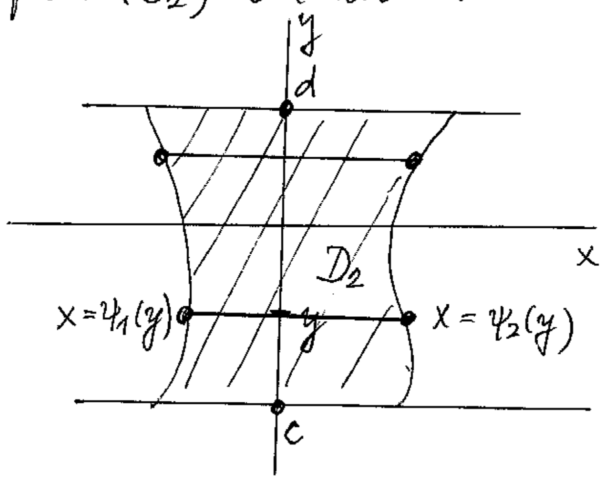
$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$ –



$D_2 = \{[x,y];\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y),\ c \leqq y \leqq d\}$, $\psi_1(y), \psi_2(y) \in C^{(1)}(\langle c,d\rangle)$;

je-li f spojitá funkce v D_2, pak $f \in R(D_2)$ a (Fubiniho věta)

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$



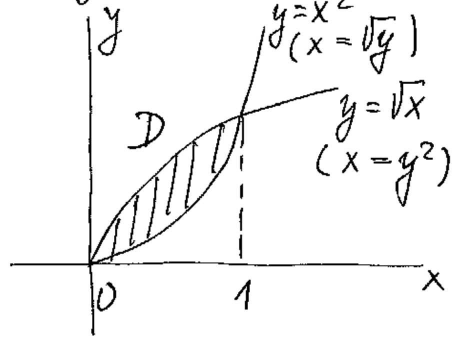
Poznámka:

Integrační oblast D v $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ může být i prvního typu i současně druhého typu – pak si můžete pořadí „vybrat" – na pořadí integrace opět nezáleží (Fubiniho věta)

Příklad: D je ohraničena grafy funkcí $f(x)=x^2$ a $g(x)=\sqrt{x}$ –

pak $D = \{[x,y];\ 0 \leq x \leq 1$ a $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ a

též $D = \{[x,y];\ 0 \leq y \leq 1$ a $y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$



Příklady:

(1.) $\displaystyle\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\rangle} x.y\,dx\,dy$ (i) funkce $f(x,y) = x.y$ je spojitá na integrační oblasti $D = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$, tedy daný integrál existuje ;

(ii) výpočet – užijeme Fubiniho větu (FV) :

$$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\rangle} x.y\,dx\,dy \underset{FV}{=} \int_0^1 dx \int_0^2 xy\,dy = \int_0^1 x\left(\int_0^2 y\,dy\right)dx = \int_0^1 x.\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx =$$

$$= \int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

nebo (opačné pořadí integrace)

$$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\rangle} x.y\,dx\,dy \underset{FV}{=} \int_0^2 dy \int_0^1 xy\,dx = \int_0^2 y\left(\int_0^1 x\,dx\right)dy = \int_0^2 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy =$$

$$= \int_0^2 \frac{y}{2}\,dy = \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^2 = 1.$$

nebo – je-li

$$\iint\limits_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle} f(x).g(y)\,dx\,dy \underset{F.V.}{=} \int_a^b f(x)\underbrace{\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)}_{\text{konstanta – lze vytknout}}dx =$$

$$= \int_c^d g(y)\,dy \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Tedy zde jednodušeji lze integrovat :

$$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\rangle} x.y\,dx\,dy = \int_0^2 y\,dy \cdot \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

(2.) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, kde $D = \{[x,y];\ -1 \leqq x \leqq 1,\ -2 \leqq y \leqq 2\}$

(i) $f(x,y) = x^2+y^2$ je spojitá na D, tedy integrál existuje;

(ii) <u>výpočet – opět užijeme Fubiniho věty</u> (FV)

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy \underset{FV}{=} \int_{-1}^{1} dx \int_{-2}^{2} (x^2+y^2)\,dy = \int_{-1}^{1} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} dx = \int_{-1}^{1} \left(4x^2 + \frac{16}{3}\right) dx =$$

$$= 4\left[\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}x\right]_{-1}^{1} = 4\left(\frac{2}{3} + \frac{8}{3}\right) = \underline{\frac{40}{3}}$$

<u>nebo integrace v „opačném" pořadí:</u>

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy \underset{FV}{=} \int_{-2}^{2} dy \int_{-1}^{1} (x^2+y^2)\,dx = \int_{-2}^{2} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-1}^{1} dy = \int_{-2}^{2} \left(\frac{2}{3} + 2y^2\right) dy =$$

$$= \left[\frac{2}{3}y + 2\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3} + 2\cdot\frac{16}{3} = \underline{\frac{40}{3}}$$

<u>Poznámka:</u>

Při výpočtu integrálů v dvojnásobné integraci lze užít sudosti integrovaných funkcí a trochu si zjednodušit „dosazování" (jedna z mezí je rovna 0):

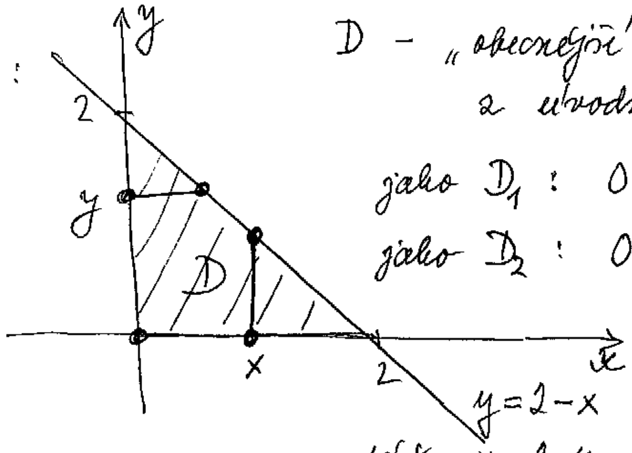
$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-2}^{2} \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{(sudá fce v } y)}\,dy = 2\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{2} (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{0}^{2} dx = 2\int_{-1}^{1} \underbrace{\left(2x^2 + \frac{8}{3}\right)}_{\text{sudá fce v } x} dx = 2.2\int_{0}^{1} \left(2x^2 + \frac{8}{3}\right) dx =$$

$$= 4\left[2\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}x\right]_{0}^{1} = 8\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) = \frac{40}{3}$$

(3.) $\iint\limits_{D} (x-y)\,dx\,dy$, kde D je omezená oblast v rovině, ohraničená přímkami $x=0,\ y=0,\ x+y=2$

D:



D – „obecnější" než obdélník, typu D_1 i D_2 z úvodního „shrnutí"

jako D_1: $0 \le x \le 2$ a $0 \le y \le 2-x$ (1)

jako D_2: $0 \le x \le 2-y$ a $0 \le y \le 2$ (2)

Tedy výpočet – užitím Fubiniho věty:

$$\iint\limits_{D} (x-y)\,dx\,dy \underset{\substack{FV\\(1)}}{=} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x-y)\,dy = \int_0^2 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x (=y)} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x(2-x) - \frac{(2-x)^2}{2} \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 4x - 2 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{2} + 2x^2 - 2x \right]_0^2 = 0$$

nebo

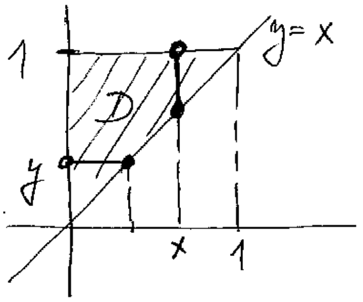
$$\iint\limits_{D} (x-y)\,dx\,dy \underset{\substack{FV\\(2)}}{=} \int_0^2 dy \int_0^{2-y} (x-y)\,dx = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} - xy \right]_0^{2-y (=x)} dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{(2-y)^2}{2} - y(2-y) \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{3}{2}y^2 - 4y + 2 \right) dy = \left[\frac{y^3}{2} - 2y^2 + 2y \right]_0^2 = 0$$

Změna pořadí integrace:

(1.) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, kde integrační obor D je

$D = \{[x,y] \in R^2;\ 0 \le y \le 1 \text{ a } 0 \le x \le y\}$, viz náčrtek D:
(tj. oblast 2. typu)

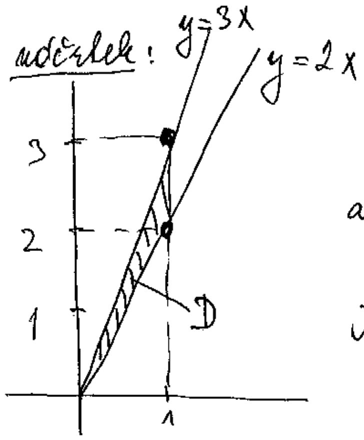


a tedy „opačné pořadí" integrace bude:

$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx$$

(2.) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, kde integrační obor D je zde:

$D = \{[x,y];\ 0 \le x \le 1,\ 2x \le y \le 3x\}$ – tj. oblast 1. typu;



Při změně pořadí integrace vidíme, že pro $0 \le y \le 2$ je $\frac{y}{3} \le x \le \frac{y}{2}$ $\left(\begin{array}{l} y = 3x \iff x = \frac{y}{3}, \\ y = 2x \iff x = \frac{y}{2} \end{array} \right)$

a pro $2 \le y \le 3$ je $\frac{y}{3} \le x \le 1$

Tedy musíme užít aditivity integrálu a dostaneme

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy \underset{F.V.}{=}$$

$$= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,dx,$$

$D_1 = \{[x,y];\ 0 \le y \le 2,\ \frac{y}{3} \le x \le \frac{y}{2}\}$ a $D_2 = \{[x,y];\ 2 \le y \le 3,\ \frac{y}{3} \le x \le 1\}$

II. Aplikace dvojného integrálu („výběr")

1) **Obsah měřitelné rovinné oblasti ω** (říká se také míra ω):

$$S(\omega)\ (\text{také } \mu(\omega)) = \iint_{\omega} dx\,dy \qquad („dS = dx\,dy")$$

2) **Objem tělesa Ω**, které je ohraničené rovinou $z=0$, grafem nezáporné funkce $z=f(x,y)$ (≥ 0) pro $(x,y)\in\omega\subset R^2$, kde ω je měřitelná oblast a $f\in R(\omega)$ (tj. f je integrovatelná funkce, nejjednodušší – f je spojitá v ω, ω – uzavřená oblast)

$$V(\Omega) = \iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (f(x,y)\,dx\,dy \text{ – „element" objemu z } \Omega \text{ se základnou } dS=dx\,dy)$$

3) **Hmotnost rovinné oblasti ω** (ω – měřitelná oblast), když plošná hustota v ω je dána funkcí $\rho=\rho(x,y)$, $(x,y)\in\omega$, kde $\rho\in R(\omega)$ (nejjednodušší případ – ω měřitelná a uzavřená, f spojitá na ω):

$$m(\omega) = \iint_{\omega} \rho(x,y)\,dx\,dy \qquad („\rho(x,y)\,dx\,dy = dm")$$

4) (pro biomediky, co mají "fyziku")
Moment setrvačnosti měřitelné oblasti ω (rovinné), nehomogenní s hustotou $\rho=\rho(x,y)$, vzhledem k ose, jdoucí kolmo k ω bodem (x_0,y_0): označme-li $d(x,y)$ vzdálenost bodu (x,y) od (x_0,y_0),

pak $$J(\omega) = \iint_{\omega} d^2(x,y)\rho(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\omega}\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$(„d^2(x,y)\rho(x,y)\,dx\,dy = dJ");$$

spec.: pro $(x_0,y_0)=(0,0)$: $$J(\omega) = \iint_{\omega}(x^2+y^2)\rho(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Příklady:

(1.) Objem tělesa (označme Ω), které je ohraničené rovinami $x=0, y=0, z=0, x=4, y=4$ a plochou $z = x^2+y^2+1$.

Ω je těleso, které je mezi rovinou $z=0$ a plochou, která je grafem funkce „$f(x,y) = x^2+y^2+1 > 0$, pro $(x,y)\in\omega$, kde $\omega = \langle 0,4\rangle \times \langle 0,4\rangle$; tedy (aplikace 2)

$$V(\Omega) = \iint\limits_{\langle 0,4\rangle\times\langle 0,4\rangle} (x^2+y^2+1)\,dx\,dy \underset{FV}{=} \int_0^4 dx \int_0^4 (x^2+y^2+1)\,dy =$$

$$= \int_0^4 \left[x^2y + \frac{y^3}{3} + y\right]_0^4 dx = \int_0^4 \left(\frac{64}{3} + 4 + 4x^2\right)dx = \left[\left(\frac{64}{3}+4\right)x + \frac{4x^3}{3}\right]_0^4$$

nebo

$\left(= \frac{76}{3}\cdot 4 + \frac{256}{3} = \frac{560}{3}\right)$ – u zkoušky bude stačit

(2) Objem tělesa (označme Ω), ohraničeného rovinami $z=0$, $x+y+z=2$ a plochou $y=x^2$.

(Příklad je „spočítán" v přednášce pro MA2 z 22. 4. 2020)

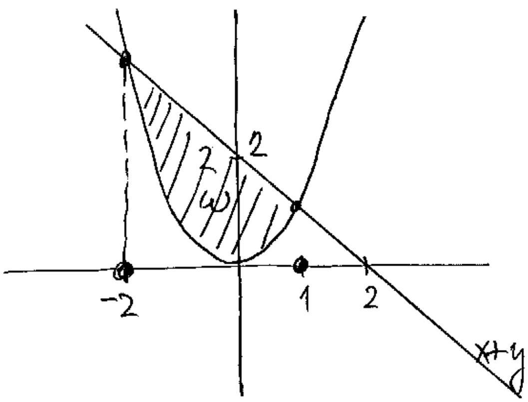
Objem tělesa pomocí dvojného integrálu (zatím) umíme, když těleso „stojí" na rovině $z=0$ a shora je ohraničené grafem funkce $z=f(x,y)$ pro $(x,y)\in\omega$;

zde – $z=0$ – máme, a shora bude těleso ohraničené grafem funkce $z = 2-x-y$, tj. naše „$f(x,y) = 2-x-y$;

co zbývá? – najít oblast ω v rovině $z=0$ (tj. v rovině xy)

1) má být $2-x-y \geq 0 \Rightarrow x+y \leq 2$ $(y \leq 2-x)$ –
– tedy oblast ω bude ohraničená přímkou $x+y=2$

2) těleso Ω je ohraničené jistě (kromě dvou rovin) plochou o rovnici $y=x^2$ (t.zv. válcová plocha), která má průnik s libovolnou rovinou, rovnoběžnou s rovinou $z=0$, tj. s rovinou o rovnici $z=k$, $k\in C$, stále stejný – parabolu $y=x^2$.
Tedy, i v rovině $z=0$ parabola $y=x^2$ ohraničuje oblast ω:



$x+y=2 \Rightarrow y=2-x$

tedy, ω je množina bodů (x,y), kde $x^2\le y\le 2-x$ a $-2\le x\le 1$

($x=-2$, $x=1$ dostaneme řešením rovnice $2-x=x^2$ – jsou to x-ové souřadnice průsečíků paraboly $y=x^2$ a přímky $y=2-x$)

tedy, $\omega=\{[x,y];\ -2\le x\le 1,\ x^2\le y\le 2-x\}$, a pak už

$$V(\Omega)=\iint_\omega (2-x-y)\,dx\,dy \underset{FV}{=} \int_{-2}^{1}dx\int_{x^2}^{2-x}(2-x-y)\,dy =$$

$$=\int_{-1}^{2}\left[(2-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2-x}dx = \int_{-1}^{2}\left[\left((2-x)^2-\frac{(2-x)^2}{2}\right)-\left((2-x)x^2-\frac{x^4}{2}\right)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(\frac{(2-x)^2}{2}+\frac{x^4}{2}-2x^2+x^3\right)dx=\left[\frac{(x-2)^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{10}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2}=$$

$$= \dots$$

(jak už bylo řečeno, u zkoušky nemusíte dopočítávat)

③ Co může „znamenat" $\iint\limits_{\langle -1,1\rangle \times \langle -2,2\rangle} (x^2+y^2)\,dx\,dy$?

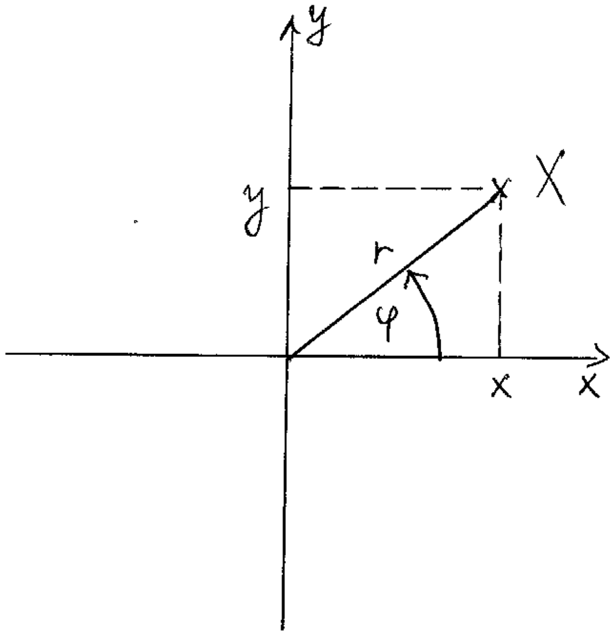
1) Integrálem se „může" počítat objem tělesa, ohraničeného rovinou $z=0$, grafem funkce $f(x,y) = x^2+y^2$ (což je rotační paraboloid), a dále rovinami $x=1, x=-1, y=-2, y=2$, tj. těleso „stojí" v rovině $z=0$ a má obdélníkovou základnu $\langle -1,1\rangle \times \langle -2,2\rangle$ (jakási podstava o obdélníkové základně pro rotační paraboloid).

2) Integrálem můžeme též počítat hmotnost nekonečně tenké obdélníkové desky $\omega = \langle -1,1\rangle \times \langle -2,2\rangle$, je-li hustota desky $\rho(x,y) = x^2+y^2$ (deska je nehomogenní).

3) Funkci $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ lze také chápat jako vzdálenost $d(x,y)$ bodu $X[x,y]$ od počátku, tedy pak funkce, kterou integrujeme, je $d^2(x,y) = x^2+y^2$, a pak integrál vyjadřuje moment setrvačnosti obdélníkové desky ω, tentokrát homogenní s hustotou $\rho(x,y)=1$, vzhledem k ose, která prochází počátkem soustavy souřadné.

III. Substituce do polárních souřadnic (ve dvojném integrálu)

Máme-li bod X v rovině, pak polohu bodu X jsme zatím určovali jeho kartézskými souřadnicemi, $X=[x,y]$.
Polohu bodu X lze určit také pomocí vzdálenosti $r \geqq 0$ bodu X od počátku $O[0,0]$, a když $X \neq O$, tak dále úhlem $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, který svírá polopřímka OX a kladná poloosa x.
Pro počátek O je $r=0$ a úhel není definován.



Je-li $[x,y] \neq [0,0]$, pak

$$(*)\ \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{matrix} r \in (0,+\infty) \\ \varphi \in \langle 0, 2\pi) \end{matrix}$$

Determinant

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}, & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

se nazývá Jacobián zobrazení (*) a je $J(r,\varphi) = r$

A pro dvojný integrál při transformaci kartézských souřadnic na polární platí „následující vzorec":

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,|J(r,\varphi)|\,dr\,d\varphi =$$

$$= \iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

D_{xy} – značí integrační oblast, definovanou (popsanou) pomocí souřadnic kartézských, a

$D_{r\varphi}$ – značí tutéž integrační oblast, ale určenou pomocí souřadnic polárních

Substituce ve dvojném integrálu do polárních souřadnic usnadňuje zpravidla výpočet integrálu u oblastí, které mají v polárních souřadnicích „jednodušší" vyjádření – například kruh nebo části kruhu – viz příklady.

Příklady:

(1) Ověření vzorce pro výpočet obsahu kruhu o poloměru $R>0$.

$S(K) = \iint_{K_{xy}} dx\,dy$ v kartézských souřadnicích:

$K_{xy} = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2;\ -R \leq x \leq R,\ -\sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2} \}$

– zde meze pro y nejsou moc „dobré" pro výpočet integrálu:

$$\iint_{K_{xy}} dx\,dy \underset{FV}{=} \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx = 4\int_{0}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx,$$

tento integrál jsme řešili pomocí 2VS, tedy $x = R\sin t$, umíme to, ale dost „náročné" na „vymyšlení" substituce.

ale
$K_{r\varphi} = \{ [x,y];\ 0 \leq r \leq R,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi) \}$ – tedy vlastně $K(R)$ je v polárních souřadnicích „obdélník"

$K_{r\varphi}(R) = \langle 0, R \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$;

pak

$$\iint_{K_{xy}} dx\,dy = \iint_{K_{r\varphi}} r\cdot dr\,d\varphi \underset{FV}{=} \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{R} r\,dr = \int_{0}^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R d\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2}\cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} = \pi R^2 \quad !$$

A jiná poznámka – při integraci „vynecháváme" počátek (nemá φ) a úsečku $r \in (0, R\rangle$, $\varphi = 0$ $(\varphi = 2\pi)$ vlastně „bereme" dvakrát, ale to hodnotu integrálu dvojného neovlivňuje.

② a) $\iint\limits_{K_{xy}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$, kde $K_{xy} = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leqq R^2\}$
(tj: kruh o poloměru R a středu v 0)

$$\iint\limits_{K_{xy}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{K_{r\varphi}} r^2 \cdot r\,dr\,d\varphi \underset{FV}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3\,dr =$$

$(x^2+y^2 = r^2)$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

Čeho by mohl být tento integrál „modelem"? – analogie příkladu posledního v části II, jen oblast co není zde obdélník, ale kruh o poloměru R, tedy integrál může měřit objem tělesa, stojícího na rovině $z=0$ s kruhovou základnou a shora omezeného rotačním paraboloidem o rovnici $z=x^2+y^2$, nebo může modelovat hmotnost kruhové desky s hustotou $\rho(x,y) = x^2+y^2$, nebo moment setrvačnosti desky kruhové, ale homogenní, vzhledem k jejímu středu.

b) $\iint\limits_{D_{xy}} \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$, kde $D_{xy} = \{[x,y];\ \pi^2 \leqq \underbrace{x^2+y^2}_{r^2} \leqq 4\pi^2\}$.

Pak, po substituci do souřadnic polárních, vyjádříme D:

$D_{r\varphi} = \{[r,\varphi];\ \pi \leq r \leq 2\pi\ ;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

a tedy $\iint\limits_{D_{xy}} \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy = \iint\limits_{D_{r\varphi}} \sin r \cdot r\,dr\,d\varphi$

$\left(\sqrt{x^2+y^2} = r\right)$

Výpočet integrálu:

$$\iint_{D_{r\varphi}} r\sin r\,dr\,d\varphi \underset{FV}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\pi^{2\pi} r\sin r\,dr = 2\pi \int_\pi^{2\pi} r\sin r\,dr \underset{pp}{=}$$

$$2\pi\left\{\left[-r\cos r\right]_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi} \cos r\,dr\right\} = 2\pi\left\{\left[-r\cos r\right]_\pi^{2\pi} + \underbrace{\left[\sin r\right]_\pi^{2\pi}}_{=0}\right\} =$$

$$= -2\pi\left(2\pi - (-\pi)\right) = -6\pi^2$$

c) Hmotnost kruhu o poloměru R, je-li hustota (plošná) v bodě X přímo úměrná vzdálenosti bodu X od středu kruhu.

Kruh můžeme umístit tak, že má střed v počátku, pak $\rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$, $k>0$, a kruh $K_{xy}(R) = \{[x,y];\ x^2+y^2 \le R^2\}$.

Pak (viz aplikace)

$$m(K) = \iint_{K_{xy}} k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy \underset{\text{polární souřadnice}}{=} \iint_{K_{r\varphi}} k\cdot r\cdot r\,dr\,d\varphi \underset{FV}{=}$$

$\sqrt{x^2+y^2} = r$, $J(r,\varphi) = r$

$$= k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2\,dr = 2\pi k \int_0^R r^2\,dr = 2\pi k\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{2}{3}\pi k R^3.$$

(„Připomínka": $K_{r,\varphi} = \{[r,\varphi],\ 0 \le r \le R;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$